Erinnerung: Mit $1 := S0$ existieren eindeutige zweistellige Verknüpfungen

$$\omega \times \omega \to \omega, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x + y \\ x \cdot y = xy \\ x^y \end{cases}$$

so dass für alle $x, y \in \omega$ gilt

$x + 0 = x$	$x + Sy = S(x+y)$
$x \cdot 0 = 0$	$x \cdot Sy = x \cdot y + x$
$x^0 = 1$	$x^{Sy} = x^y \cdot x$

Diese Verknüpfungen besitzen die folgenden Grundeigenschaften:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$0 + x = x$	$1 \cdot x = x$
$0 \neq 1$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$	$x^0 = 1$
$(xy)^z = x^z \cdot y^z$	$x^1 = x$
$x^{yz} = (x^y)^z$	$1^x = 1$

Definition: Für alle $x, y \in \omega$ setzen wir

$$x \leqslant y := (\exists z \in \omega\colon x + z = y).$$

Diese Relation ist alleine mittels der Peano-Axiome definiert. In dem Modell ω kennen wir sie aber schon:

Proposition: Für alle $x, y \in \omega$ gilt

$$x \leqslant y \;\longleftrightarrow\; x \in y \vee x = y.$$

Weiter gelten für diese Relation die folgenden Grundeigenschaften in Beziehung zu 0, S, $+$ und $\cdot$:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

$x \leqslant x$	$0 \leqslant x$
$x \leqslant y \wedge y \leqslant x \longrightarrow x = y$	$x \leqslant y \longleftrightarrow Sx \leqslant Sy$
$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \longrightarrow x \leqslant z$	$x \leqslant y \longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$
$x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x$	$x \leqslant y \ \longrightarrow \ xz \leqslant yz$

Äquivalente Versionen des Auswahlaxioms

Auswahlaxiom (AC): Für jede Menge F, so dass jedes $X \in F$ eine nichtleere Menge ist, existiert eine Funktion

$$f\colon F \to \bigcup F \quad \text{mit} \quad \forall X \in F\colon f(X) \in X.$$

Übersetzt: Für jede Menge F, so dass jedes $X \in F$ eine nichtleere Menge ist, ist das kartesische Produkt $\bigtimes_{X \in F} X$ nichtleer.

Wohlordnungsprinzip (WOP): Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.

Kuratowski-Zorn-Lemma (KZL): Jede nichtleere Partialordnung $(X, \leqslant)$, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, besitzt ein maximales Element.

Alle diese sind unter ZF äquivalent.

(Vgl. [Ebbinghaus Kap.VIII Satz 2.3 und 3.2.)

Satz: ZF $\vdash$ AC $\longrightarrow$ WOP.

Beweis: Sei X eine Menge. Nach AC existiert eine Funktion $c\colon \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ mit $\forall Y : c(Y) \in Y$.

Wir nennen ein Paar $(A, \leqslant)$ einen *Anfang*, falls gilt:

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{l} A \subseteq X \text{ und} \\ \leqslant \text{ ist eine Wohlordnung auf } A \text{ und} \\ \forall a \in A\colon a = c(X \setminus A_{<a}). \end{array}\right]$$

Diese Bedingung lässt sich durch ein Prädikat ausdrücken.

Im folgenden versehen wir jedes Anfangssegment mit der induzierten Ordnung.

Behauptung 1: Für je zwei Anfänge $(A, \leqslant)$ und $(A', \leqslant')$ ist einer ein Anfangssegment des anderen.

Sei jetzt B die Vereinigung der Mengen A in allen Anfängen $(A, \leqslant)$. Dies ist eine Menge, da die Bedingung $(*)$ durch ein Prädikat beschrieben werden kann.

Behauptung 2: Es gibt eine Ordnung $\preceq$ auf B, so dass $(B, \preceq)$ ein Anfang ist.

Behauptung 3: Es ist $B = X$.

Nun ist $\preceq$ die gesuchte Wohlordnung auf X. $\square$

Satz: $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{WOP} \longrightarrow \mathrm{KZL}$.

Beweis: Sei $(X, \leqslant)$ eine nichtleere Partialordnung, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt. Wähle eine Wohlordnung $\preceq$ auf X. Betrachte die Klassenfunktion

$$F(x, f) \;:=\; \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{y \in \mathrm{Def}(f)} f(y) \cup \{x\} & \text{falls dies eine Teilmenge von } X \text{ und eine Kette bezüglich } \leqslant \text{ ist,} \\ \displaystyle\bigcup_{y \in \mathrm{Def}(f)} f(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Rekursionssatz existiert eine Funktion A auf X mit $\forall x \in X \colon A(x) = F(x, f|X_{\prec x})$. Das heisst, für alle $x \in X$ gilt:

$$(*) \qquad A(x) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{y \in X,\, y \prec x} A(y) \cup \{x\} & \text{falls dies eine Teilmenge von } X \text{ und eine Kette bezüglich } \leqslant \text{ ist,} \\ \displaystyle\bigcup_{y \in X,\, y \prec x} A(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung 1: Für alle $x \in X$ gilt $A(x) \subseteq X$.

Behauptung 2: Für alle $x, y \in X$ mit $y \preceq x$ gilt $A(y) \subseteq A(x)$.

Behauptung 3: Für jedes $x \in X$ ist $A(x)$ eine Kette bezüglich $\leqslant$.

Behauptung 4: Die Menge $B := \bigcup_{x \in X} A(x)$ ist eine Kette bezüglich $\leqslant$.

Behauptung 5: Die Menge B ist eine maximale Kette bezüglich $\leqslant$.

Behauptung 6: Jede obere Schranke von B ist ein maximales Element von X bezüglich $\leqslant$.

$\square$

Satz: ZF $\vdash$ KZL $\longrightarrow$ AC.

Beweis: Sei F eine Menge mit $\forall x \in F\colon x \neq \varnothing$. Setze

$$S \;:=\; \left\{ A \subseteq F \times \bigcup F \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ ist Graph einer Funktion } f\colon X \to \bigcup F \\ \text{für eine Teilmenge } X \subseteq F, \\ \text{so dass } \forall x \in X\colon f(x) \in x. \end{array} \right\}$$

Diese Menge ist partialgeordnet durch $\subseteq$.

Behauptung 1: Jede Kette $K \subseteq S$ hat die obere Schranke $\bigcup K$.

Wegen $\varnothing \in S$ ist S nichtleer. Nach Behauptung 1 und KZL besitzt S also ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element A. Sei $f\colon X \to \bigcup F$ die entsprechende Funktion.

Behauptung 2: Es ist $X = F$.

Die Funktion $f\colon F = X \to \bigcup F$ hat die gesuchte Eigenschaft $\forall x \in X\colon f(x) \in x$. $\square$